Klaim 0: Jika n bilangan asli yang habis dibagi 20, semua kelipatan n tidak mungkin merupakan bilangan tawas.

Bukti: Ambil m sebarang kelipatan dari n, dan misalkan representasi desimalnya m adalah . Karena 20|n, maka 20|m. Jelas i asli . Maka, . Karena 20|, akibatnya . Akibatnya, , ekivalen dengan . Karena maka dapat disimpulkan , dan , ekivalen dengan . Akibatnya genap. Karena ada dua digit berurutan di m yang paritasnya sama-sama genap (, maka m lainan bilangan tawas. Akibatnya, jika n habis dibagi 20, semua kelipatan n bukan bilangan tawas. Terbukti.

Lemma X: Jika ada n+1 bilangan asli berbeda, bisa dicari dua di antaranya yang selisihnya habis dibagi oleh n.

Bukti Lemma X: Misalkan bilangannya . Dari PHP, karena hanya ada n buah kemungkinan dalam mod n, maka ada dua buah bilangan dari bilangan-bilangan tersebut yang sama dalam mod n. Misalkan kedua bilangan ini . Maka, , ekivalen dengan . Terbukti.

Sekarang akan dibuktikan jika n tidak habis dibagi 20, ada kelipatan n yang merupakan bilangan tawas.

Bagi jadi 4 kasus:

Kasus 1: . Akibatnya n relatif prima terhadap 10.

Lihat n+1 bilangan pertama dari barisan , dimana string 69 diulang sebanyak k+1 kali. Jelas semua bilangan tawas. Dari lemma X, bisa didapat dua bilangan berbeda dan dari n+1 bilangan yang pertama tadi sehingga . Wlog p>q, akibatnya . Misalkan p=q+r+1 dan j=i-q-1, maka . Karena n relatif prima dengan 10, maka . (string 69 diulang sebanyak r+1 kali) Karena tawas dan habis dibagi n, maka di kasus ini terbukti ada kelipatan n yang merupakan bilangan tawas.

Kasus 2: , ekivalen dengan . Akibatnya relatif prima terhadap 10. Dari kasus 1, ada r sehingga (69 nya diulang r kali). Maka, , dimana string 69 di bilangan terakhir diulang sebanyak r kali. Jelas dan habis dibagi n, maka terbukti jika di kasus ini ada kelipatan n yang merupakan bilangan tawas.

Kasus 3: . Maka, , dimana d ganjil. Jelas d relatif prima terhadap . Dari definisi n di awal, d juga relatif prima terhadap 5.

Klaim 1: Untuk setiap m asli, bisa ditemukan bilangan tawas yang banyak digitnya genap dan habis dibagi

Bukti: Subklaim 1a: Untuk setiap k asli, bisa ditemukan asli, sehingga bilangan tawas yang punya 2k digit, dan .

Bukti subklaim 1a: Untuk k=1, ambil . Jelas bilangan ini tawas, dan . Jadi bisa disimpulkan jika k=1, subklaimnya benar.

Sekarang misalkan klaimnya benar jika k=j. Artinya, bisa ditemukan bilangan tawas yang punya 2j digit sehingga Jelas digit terakhir bilangan tawas ini genap. Sekarang, ambil empat bilangan , dimana (bilangan yang punya sebanyak 2j+2 digit). Jelas keempatnya adalah bilangan tawas yang punya 2j+2 digit.

Bisa dilihat jika . Jelas ,,,,.Akibatnya, . Analog, bisa dilihat jika habis dibagi juga

Akibatnya, kemungkinan hasil bagi keempat bilangan ini jika dibagi hanya (karena , maka sisa pembagian keempat bilangan ini jika dibagi oleh habis dibagi oleh

Pre Lemma:

Bukti: ,ekivalen dengan , ekivalen dengan parnyataan awal. Terbukti.

Bagi jadi empat kasus:

1. . Maka, . Maka, mamanuhi subklaim 1a untuk kasus k=j+1
2. . Maka, . Maka, mamanuhi subklaim 1a untuk kasus k=j+1.
3. . Maka, . Maka, mamanuhi subklaim 1a untuk kasus k=j+1.
4. . Maka, . Maka, mamanuhi subklaim 1a untuk kasus k=j+1.

Karena di semua kasus bisa didapatakan yang mamanuhi subklaim 1a untuk kasus k=j+1, maka bisa disimpulkan jika subklaim 1a benar jika k=j+1. Maka, bardasarkan induksi, subklaim 1a benar untuk semua k asli. Subklaim 1a terbukti.

Karena subklaim 1a benar, maka akibatnya untuk setiap m asli, bisa ditemukan sebuah bilangan tawas x yang punya 2m digit dan memenuhi . => untuk setiap m, ada bilangan tawas x yang banyak digitnya genap dan habis dibagi . Klaim terbukti.

Sekarang ambil bilangan tawas yang banyak digitnya genap dan habis dibagi . Misalkan . Jelas paritas dan berbeda. Definisikan barisan , dan perhatikan d+1 anggota partamanya. Dari definisinya, maka , dimana string bilangan diulang sebanyak k+1 kali. Karena paritas setiap dua digit yang sabalahan berbeda ( tawas, ldan paritas dan berbeda), maka untuk semua k, bilangan tawas. Jelas karena , maka .

Dari lemma X, bisa didapat dua bilangan yang berbeda dan dari d+1 bilangan yang pertama tadi sehingga . Wlog p>q, akibatnya . Misalkan p=q+r+1 dan j=i-q-1, maka . Karena d relatif prima terhadap 10, maka .

Karena tawas, habis dibagi d, dan habis dibagi , maka habis dibagi oleh . Akibatnya, untuk setiap n yang mamanuhi , ada kelipatan n yang merupakan bilangan tawas. Terbukti.

Kasus 4:, maka , dimana d ganjil dan tidak habis dibagi 5. Jelas d relatif prima terhadap 2 maupun

Klaim 2: Untuk setiap m asli, bisa ditemukan bilangan tawas ganjil yang banyak digitnya ganjil dan habis dibagi

Bukti: Subklaim 2: Untuk setiap k asli, bisa ditemukan asli, sehingga bilangan tawas ganjil yang punya 2k+1 digit, dan memenuhi .

Bukti subklaim: Untuk k=1, ambil . Jelas bilangan ini tawas, dan . Jadi bisa disimpulkan jika k=1, subklaimnya benar.

Sekarang misalkan subklaim 2 benar jika k=j. Artinya, bisa ditemukan bilangan tawas yang punya 2j+1 digit dan memenuhi . Sekarang, ambil 25 buah bilangan dimana (bilangan yang punya sebanyak 2j+3 digit), p diambil dari {1,3,5,7,9}, q diambil dari (0,2,4,6,8). Jelas semua bilangan yang dimaksud ini merupakan bilangan tawas yang mempunyai 2j+3 digit. Karena . Karena , dan , maka . Karena , maka sisa pembagian oleh habis dibagi . Akibatnya, sisa pembagian sisa pembagian oleh adalah , dimana .

Akan dibuktikan jika salah satu dari ke 25 bilangan di atas habis dibagi . Maka, asumsikan kalimat sebelumnya tidak benar, maka tidak ada dari ke25 bilangan tersebut yang sisanya nol jika dibagi oleh . Akibatnya, hanya ada maksimum 24 kemungkinan sisa pembagian ka25 bilangan tersebut oleh . Bardasarkan PHP, akibatnya ada x,y,z,w sehingga oleh adalah dua bilangan berbeda, termasuk dari 25 bilangan yang tarpilih sebelumnya, dan sisanya sama jika dibagi . Wlog . Maka, . Karena 5 relatif prima terhadap 2, maka pernyataan terakhir ekivalen dengan . Akibatnya, .

Karena dan kaduanya bilangan dua digit yang berbeda, maka selisih kaduanya bilangan satu digit atau dua digit. Karena selisih kaduanya habis dibagi 25, maka kemungkinan selisihnya adalah 25,50, atau 75. Karena y dan w kaduanya genap, maka selisih dan tidak mungkin ganjil. Maka, . Akibatnya, .

Karena y dan w merupakan bilangan 1 digit, tidak mungkin |y-w|>9. Padahal, satu-satunya kelipatan 10 yang absolutnya tidak labih kecil dari 9 hanyalah 0 saja. Maka, |y-w|=0, ekivalen dengan y=w. Akibatnya, x-z=5. Padahal, x dan z sama-sama ganjil, maka x-z genap, kontradiksi. Maka, asumsi awal salah. Akibatnya, dari 25 bilangan dimana p diambil dari {1,3,5,7,9}, dan q diambil dari {2,4,6,8,0}, bisa diambil f dan g sehingga habis dibagi oleh . Karena tawas dan punya 2j+3 digit, maka bisa diambil . Akibatnya, subklaim 2 benar juga jika k=j+1. Berdasarkan induksi, akibatnya subklaim 2 benar untuk semua k asli. Subklaim 2 erbukti.

Karena subklaim 2 benar, maka akibatnya untuk setiap m asli, bisa ditemukan sebuah bilangan tawas x yang punya 2m+1 (ganjil) digit dan . => untuk setiap m, ada bilangan tawas x ganjil yang banyak digitnya ganjil dan habis dibagi . Klaim 2 terbukti.

Sekarang ambil bilangan tawas ganjil yang banyak digitnya ganjil dan habis dibagi . Misalkan . Jelas paritas dan berbeda. Definisikan barisan , dan perhatikan d+1 anggota partamanya. Dari definisi, maka , dimana string bilangan diulang sebanyak k+1 kali, dan digit 0 muncul sebelum string sebanyak k kali. Karena paritas setiap dua digit yang bersebelahan berbeda , maka untuk semua k, bilangan tawas. Jelas karena , maka .

Dari lemma X, bisa didapat dua bilangan yang berbeda dan dari d+1 bilangan yang pertama tadi sehingga . Wlog p>q, akibatnya . Misalkan p=q+r+1 dan j=i-q-1, maka . Karena d relatif prima terhadap 10, maka . Karena tawas, habis dibagi d, dan habis dibagi , maka habis dibagi oleh . Akibatnya, untuk setiap n yang memenuhi , ada kelipatan n yang merupakan bilangan tawas. Terbukti.

Karena di keempat kasus terbukti bahwa ada kelipatan n yang merupakan bilangan tawas, maka terbukti untuk semua n yang tidak habis dibagi 20, ada kelipatan n yang merupakan bilangan tawas.

Jadi, bisa disimpulkan bahwa tidak ada kelipatan n yang merupakan bilangan tawas jika dan hanya jika n habis dibagi 20